

**Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”  
Etapa locală - 16 februarie 2013****Clasa a IX-a – științe ale naturii**

1. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică. Știind că  $a_1 > 0, r > 0$ . Să se arate că

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}, \forall n \geq 2.$$

2. a) Să se rezolve ecuația  $\left[ \frac{x+1}{2} \right] = \frac{x+2}{3}$ .

- b) Să se demonstreze inegalitatea:  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ .

3. a) Fie  $ABC$  un triunghi și punctele  $M \in AB, N \in AC$  și  $P \in BC$  astfel încât  $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AC}$  și  $P$  mijlocul segmentului  $[BC]$ . Să se afle suma  $a + b$ , unde  $\overrightarrow{AP} = a \overrightarrow{AM} + b \overrightarrow{AN}$ .

- b) Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A_1 B_1 C_1$  având centrele de greutate  $G$  respectiv  $G_1$ . Să se arate că  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3 \overrightarrow{GG_1}$ .

4. Se consideră un pătrat având perimetrul  $P_1$ . Pornind de la acest pătrat construim un șir de  $n$  pătrate,  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel: al doilea pătrat de perimetru  $P_2$  este pătratul care are ca vârfuri mijloacele laturilor pătratului inițial, al treilea pătrat este pătratul de perimetru  $P_3$ , care are ca vârfuri mijloacele laturilor celui de-al doilea pătrat, ș.a.m.d.

- a) Arătați că  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este o progresie geometrică de rație  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

- b) Al câtelea pătrat are perimetrul egal cu o optime din perimetrul primului pătrat?

- c) Dacă primul pătrat are perimetrul egal cu 10, câte dintre primele 2013 pătrate au perimetrele numere raționale?

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

**Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”  
Etapa locală - 16 februarie 2013****Clasa a X-a – științe ale naturii**

1.
  - a) Să se compare numerele  $a = \sqrt{1+\sqrt{2}}$  și  $b = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ .
  - b) Să se arate că numărul  $a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5+2\sqrt{6}}$  este număr natural.
2.
  - a) Să se calculeze  $A = \lg(2-\sqrt{3}) + \lg(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \lg(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \lg(2+\sqrt{3})$ .
  - b) Dacă  $a, b \in (0,1)$ , să se demonstreze inegalitatea:  $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$ .
3.
  - a) Să se determine  $z \in \mathbb{C}$  dacă  $2\bar{z} + z = 3 + 4i$ .
  - b) Să se determine  $z \in \mathbb{C}$ , care verifică egalitatea  $|z - 3i|^2 = 2|z|^2 + 18$ .
4. În urma unor cercetări, s-a stabilit că solubilitatea în apă a unei substanțe  $s$  în raport cu temperatura (măsurată în grade Celsius), este dată de o formulă de forma  $S(t) = at^2 + bt + c$ , unde  $a, b, c \in (0, \infty)$ , iar  $t \geq 10$  (grade Celsius). Experimental, s-au determinat valorile solubilității la câteva temperaturi, anume:  $S_1 = 10$ ,  $S_2 = 15$ ,  $S_3 = 25$ , pentru temperaturile  $t_1 = 20, t_2 = 25$ , respectiv  $t_3 = 30$ . (Solubilitatea  $S$  este exprimată în g substanță  $s$  la 100g apă).
  - a) Găsiți valoarea solubilității substanței date  $s$  la temperatura de  $50^\circ$ ;
  - b) Arătați că există două temperaturi diferite la care solubilitatea substanței  $s$  este aceeași.

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

**Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”  
Etapa locală - 16 februarie 2013****Clasa a XI-a – Științe ale naturii**

1. Unui elev i se scrie pe tablă matricea  $A = \begin{pmatrix} -10 & * & -7 \\ * & -2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ . Profesorul îi cere să înlocuiască asteriscurile cu numere

întregi astfel încât, după completare, sumele tuturor numerelor de pe fiecare linie, fiecare coloană și de pe cele două diagonale să fie egale. Este posibil acest lucru? În caz afirmativ ce matrice obține elevul?

2. a) Să se demonstreze că  $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$ , pentru orice matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .
- b) Pentru orice matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , notăm cu  $Tr(A)$  suma elementelor de pe diagonala principală, iar cu  ${}^tA$ , transpusa sa. Să se arate că oricare ar fi  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , avem  $Tr(A {}^tA) \geq 0$ .
3. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A_n(n, n+2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- a) Să se scrie ecuația dreptei  $A_0A_1$ .
- b) Să se arate că toate punctele  $A_n$  sunt coliniare.
- c) Să se demonstreze că aria triunghiului  $OA_nA_{n+1}$  nu depinde de  $n$ .
4. a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ .
- b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2+6x+7} + x \right)$ .
- c) Să se determine asimptota spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ .

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

**Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”  
Etapa locală - 16 februarie 2013****Clasa a XII-a – Științe ale naturii**

1. Pe  $(6, \infty)$  definim legea " $\circ$ " prin relația  $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42, \forall x, y \in (6, \infty)$ .
- a) Să se determine elementul neutru al legii și elementele simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ ";
- b) Să se determine  $x \in (6, \infty)$  pentru care  $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{2013} = x$ .
- c) Să se arate că funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow (6, \infty), f(x) = x + 6$  este izomorfism între grupurile  $((0, \infty), \cdot)$  și  $((6, \infty), \circ)$
2. În mulțimea  $M_2(\mathbb{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{X(a) | X(a) = I_2 + aA, a > -1\}$ .
- a) Să se arate că  $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab), \forall a, b > -1$ ;
- b) Să se arate că  $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(n) = X((n+1)! - 1)$ .
3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$ .
- a) Să se arate că funcția dată admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- b) Să se determine o primitivă  $F$  a lui  $f$ .
4. Să se calculeze:
- a)  $\int \sqrt{x^2 + 3} dx, x \in \mathbb{R}$ .
- b)  $\int \frac{e^{\arctg x} + x \ln(x^2 + 1) + 1}{x^2 + 1} dx, x \in \mathbb{R}$ .

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.